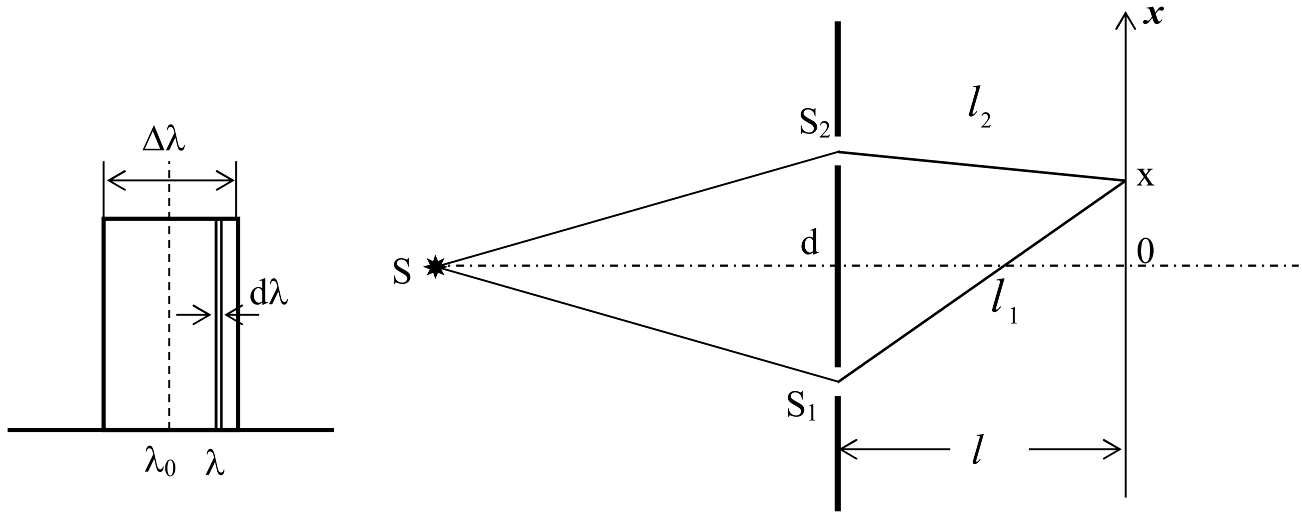
Когерентность.

Под термином **когерентность** мы будем понимать способность волн интерферировать друг с другом.

Можно выделить два крайних случая задачи о когерентности световых волн.

I. ***Временная когерентность.***

Рассмотрим <u>точечный источник</u>, излучающий волны в спектральном диапазоне $\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} < \lambda < \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$. При этом полагаем, что $\Delta\lambda << \lambda$. В данном случае интерференционная картина в классической схеме Юнга будет определяться суперпозицией интерференционных картин, полученных от узких (практически монохроматических) спектральных



интервалов шириной $d\lambda$.

Интенсивность света, идущего от такого узкого спектрального интервала

$$di = \frac{I_0}{\Delta\lambda} d\lambda \qquad (1)$$

где I_0-полная интегральная интенсивность излучения источника во всем спектральном интервале $\Delta\lambda$. Будем считать, что волны, имеющие одну длину волны λ и идущие по оптическим путям l_1 и l_2, когерентны между собой, тогда даваемая ими интенсивность интерференционной картины рассчитывается по формуле:

$$dI = 2di(1 + \cos\delta), \qquad (2)$$

где

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(l_1 - l_2) \tag{3}$$

оптическая разность фаз. Разность хода

$$\Delta = (l_1 - l_2) = \frac{x\,d}{\ell}, \tag{4}$$

где ℓ - расстояние от юнговских щелей до экрана, x - координата точки наблюдения, d - расстояние между источниками. В выражениях (3) и (4) учтено, чио в реальных оптических схемах выполняется условие $x << l$ и $d << l$.

$$dI = \frac{2I_0}{\Delta\lambda} d\lambda \left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x \cdot d}{l}\right). \tag{5}$$

Выражение (5) мы можем переписать в терминах модуля волнового вектора $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, тогда $d\lambda = dk\,\frac{\lambda^2}{2\pi}$, а $\Delta\lambda = \frac{\Delta k\;\lambda^2}{2\pi}$. Отсюда

$$dI = \frac{2I_0}{\Delta k} dk \left(1 + \cos k\,\frac{x \cdot d}{\ell}\right) \tag{6}$$

Будем полагать, что волны, имеющие различные длины волн λ в пределах спектрального интервала $\Delta\lambda$ не когерентны между собой. В обычных (не лазерных) источниках эти волны излучаются различными нескоррелированными осцилляторами.

Тогда, чтобы получить суммарную интенсивность, мы должны складывать или интегрировать интенсивности от каждого узкого спектрального участка.

$$I = \frac{2I_0}{\Delta k}\int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} \left(1 + \cos k\,\frac{x \cdot d}{\ell}\right) dk \tag{7}$$

Проинтегрируем данное выражение. Результирующая интенсивность

$$I = I_0 \left(1 + \frac{\sin\frac{\Delta k}{2}\cdot\frac{x \cdot d}{\ell}}{\frac{x \cdot d}{\ell}\,\frac{\Delta k}{2}} \cos k_0\,\frac{x \cdot d}{\ell}\right) \tag{8}$$

Или с учетом (4)

$$I = I_0 \left(1 + \frac{\sin\frac{\Delta k \Delta}{2}\cdot}{\frac{\Delta k \Delta}{2}} \cos k_0 \Delta\right) \tag{8a}$$

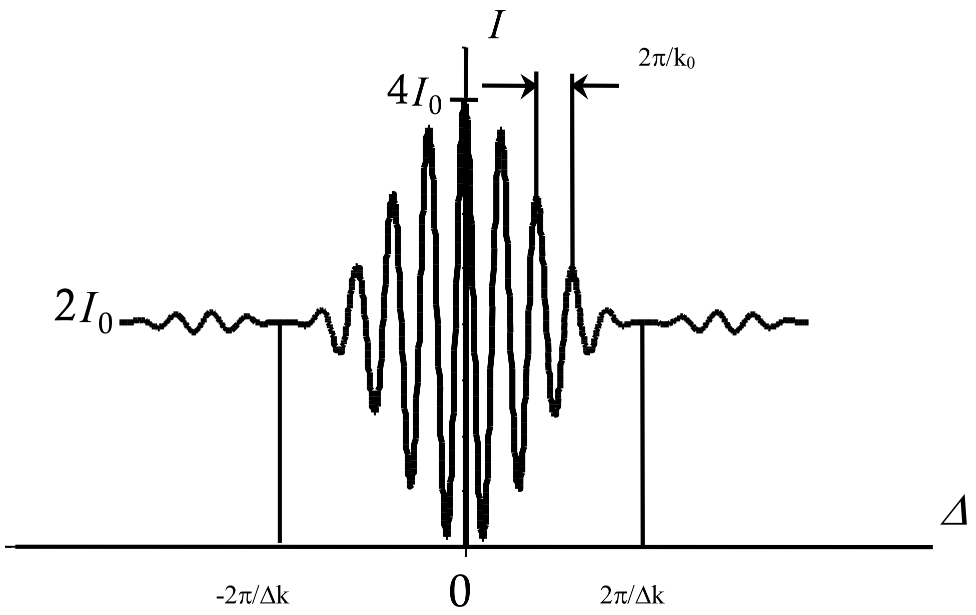


Рис. 2. Распределение интенсивности интерференционной картины источника конечного спектрального состава.

Введём функцию, определяющую видность интерференционной картины.

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{9}$$

Нетрудно показать, что

$$V = \frac{\sin \Delta k \dfrac{x \cdot d}{2l}}{\Delta k \dfrac{x \cdot d}{2l}} \tag{10}$$

Данная функция обращается в нуль при условии

$$\Delta k \frac{x \cdot d}{2\ell} = \pi n, \tag{11}$$

где n = 1, 2, 3, … Первого минимум появляется при координате

$$x_1 = \frac{\pi \ell}{2\Delta k \cdot d}. \tag{12}$$

Видность зависит от координаты, при $x_1 \to 0$, $V \to 1$, реальные интерференционные картины видны вблизи оптической оси системы на расстоянии не превышающем x_1. При $\Delta k \to 0$, $x_1 \to \infty$, то есть при уменьшении спектрального интервала интерференционная картина становится видна при всех возможных x.

Найдём оптическую разность хода, соответствующую первому исчезновению интерференционной картины, для этого подставим значение координаты из выражения (12) в выражение (3), получим предельную разность хода при которой интерференционная картина еще видна

$$L_{ког} = \Delta_{ког} = \frac{2\pi}{\Delta k}. \tag{13}$$

Данная величина называется длиной когерентности (продольной длиной когерентности). Если вернуться к терминам длинн волн λ, то получим известное выражение:

$$L_{ког} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \tag{14}$$

Когерентность источника удобно характеризовать максимальным порядком интерференции $m_{\max}$ - числом, показывающим сколько порядков будет наблюдаться в интерференционной картине.

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{15}$$

или

$$m_{\max} = \frac{k}{\Delta k} \tag{16}$$

Рассмотрим более подробно физический смысл, полученных выражений. Известно, что реальные источники излучают световые колебания конечной длительности τ, такие "обрывки" синусоидальных колебаний называются цугами. Ширина спектра излучения источника связана с временем излучения источника цуга сотношением

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau}. \tag{17}$$

Учтем, что

$$\Delta k = \frac{2\pi\Delta\nu}{c}, \tag{18}$$

получим

$$\Delta k = \frac{2\pi}{c\tau}, \tag{19}$$

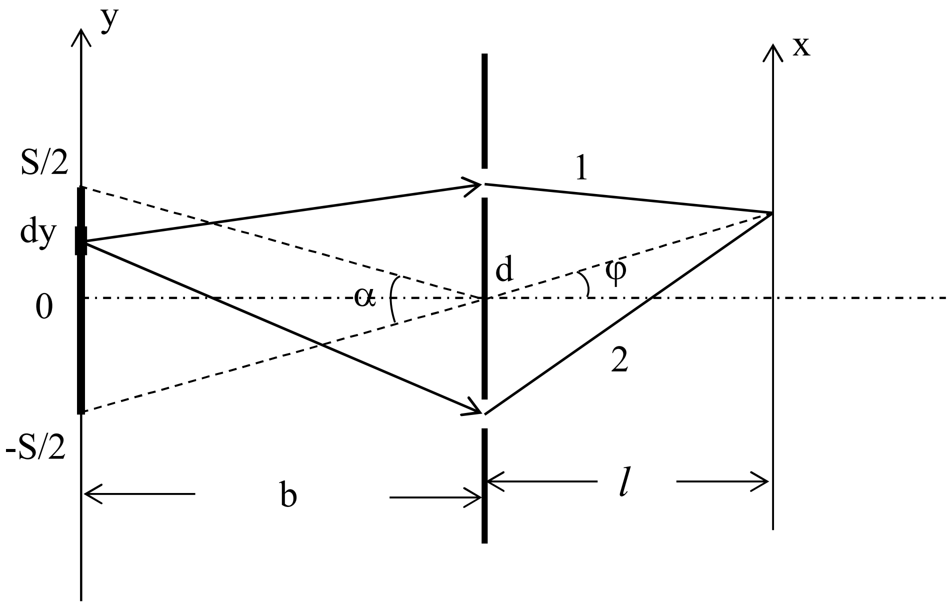
где c -скорость света.

Пространственный размер цуга равен τc, сравнив выражения (13) и (19) получим, что длина когерентности соответствует эффективной длительности цуга и определяется временем излучения цуга τ. Поэтому данный тип когерентности (точечный источник, имеющий широкий спектр излучения) называется прстранственным. Фактически при времени задержки одного колебания относительно другого $\tau_з$ на время большее времени излучения τ цуги не взаимодействуют друг с другом, интерференция отсутствует.

II. ***Пространственная когерентность.***

Рассмотрим классическую схему Юнга, источником в которой является щель шириной S . Выберем узкую полоску щели шириной dy, находящуюся на расстоянии y от оси системы и найдем разность фаз для волн, идущих от этой полоски.

Оптическая разность фаз, набираемая волнами 1 и 2 в области,



лежащей за Юнговскими щелями

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{x \cdot d}{l}. \tag{20}$$

Введем прекцию среднего вектора $\vec{k}$ на ось x, с учетом малости угла $\varphi = \frac{x}{l}$, можно записать

$$\delta_1 = k_x \cdot d \ . \tag{21}$$

В левой части схемы волны, идущие от точки с координатой y набирают дополнительную разность фаз

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{y \cdot d}{b}, \tag{22}$$

где b-расстояние от иточника до экрана с Юнговскими щелями. Введем прекцию среднего вектора $\vec{k}$ на направление y. Учтем условие $S << b$, тогда дополнительную разность фаз можно представить ввиде

$$\delta_2 = k_y \cdot d . \qquad (23)$$

Конечным образом, задача сводится к нахождению суперпозиции интерференционных картин, образующихся при сложении волн, имеющих до падения на Юнговские щели разброс проекций волнового вектора

$$\Delta k_y = \frac{k}{\alpha}, \qquad (24)$$

где α -угловой размер источника.

Суммарная разность фаз набираемая в левой и правой частях схемы

$$\delta = (k_y + k_x) \cdot d \qquad (25)$$

Нетрудно показать, что интенсивность волн, идущих от бесконечно узкого участка щели dy, находящегося на расстоянии y от центра щели

$$di = \frac{I_0}{\Delta k_y} d(k_y), \qquad (26)$$

где I_0-интенсивность света, испускаемого всей щелью.

Полагая, что волны идущие от разных участков щели некогерентны, можем записать выражение для интенсивности интерференционной картртины:

$$I = \frac{2I_0}{\Delta k} \int_{-\frac{\Delta k_y}{2}}^{\frac{\Delta k_y}{2}} (1 + \cos(k_x + k_y) dk_y , \qquad (27)$$

или

$$I = 2I_0 \left(1 + \frac{\sin \frac{\Delta k_y \cdot d}{2}}{\frac{\Delta k_y \cdot d}{2}} \cdot \cos(k_x d) \right). \qquad (28)$$

Видность интерференционной картины

$$V = \frac{\sin \frac{\Delta k_y \cdot d}{2}}{\frac{\Delta k_y \cdot d}{2}}, \qquad (29)$$

или

$$V = \frac{\sin\dfrac{k \cdot d}{2\alpha}}{\dfrac{k \cdot d}{2\alpha}}. \qquad (30)$$

В отличии, от решенной нами задачи о временной когерентности, в данном случае видность интерференционной картины зависит только от параметров источника и расстояния между щелями и не зависит от координаты точки наблюдения. Первое исчезновение интерференционной картины наблюдается при условии

$$\frac{\Delta k_y \cdot d}{2} = \pi, \qquad (31)$$

или

$$\Delta k_y = \frac{2\pi}{d}, \qquad (32)$$

при этом интерференционная картина исчезает во всем пространстве *независимо* от координаты x.

Для характеристики степени когерентности введем параметр ρ, называемый радиусом когерентности. Величина данного параметра равна максимальному расстоянию между Юнговскими щелями при котором еще видна интерференционная картина, данный параметр является характеристикой источника в месте построения интерференционной схемы. Нетрудно показать, что

$$\rho = \frac{2\pi}{\Delta k_y}. \qquad (33)$$

С учетом соотношения (24) получим известное выражение для радиуса когерентности:

$$\rho = \frac{k}{\alpha}. \qquad (34)$$

Очевидно, чем меньше угловой размер источника, и соответственно разброс прекций волнового вектора, тем больше радиус когерентности источника. Можно показать, что волны, идущие от точек, отстоящих друг от друга на расстояние ρ, имеют разность фаз π и гасят друг друга, чем и объясняется эффект исчезновения интерференционной картины.

Обычные источники имеют пространственный размер и широкий спектр, поэтому для их характеристики вводится объем когерентности:

$$V = \pi\rho_{ког}^2 L_{ког}$$